数理解析研究所講究録
105巻 1971年 1-17

Turning point をもつ線型常微分方程式について

東工大・理　中野　実

§1. 序.

1° x が複素数で原点の近傍：$|x|\leq a_0$ を動き，ε を小さな正のパラメーターとして

$$\varepsilon^2 y'' + (x^m - x^n \varepsilon) y = 0$$

または

(1) $$\varepsilon Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x^m + \varepsilon x^n & 0 \end{bmatrix} Y$$

なる形の方程式について考える．ここに，m と n の間には後述の characteristic polygon が2つの線分から成るという条件

(2) $$m > 2n + 2, \quad n \geq 0$$

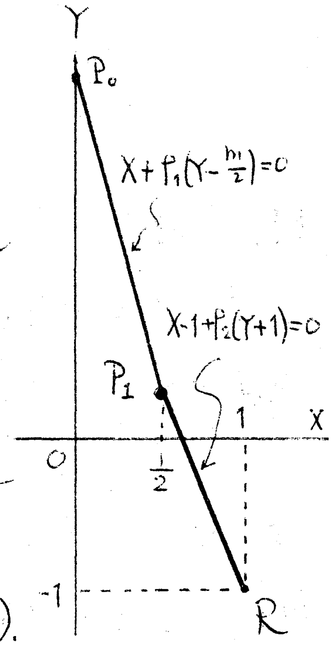
が満されているとする．

2° 一般に

(3) $$\varepsilon^\sigma Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(x,\varepsilon) & 0 \end{bmatrix} Y, \quad a(x,\varepsilon) \sim c x^\nu + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{h=m_r}^{\infty} a_{rh} x^h \varepsilon^r \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

と書いたとき，

$R=(\sigma,-1)$，$P_0=(0,\nu/2)$，$P_r=(r/2,m_r/2)$ $(r=1,2,\cdots)$
なる点を直交座標をもつ(X,Y)平面上にとると，それらを結ぶ線分の中で最も下側にあるものは下に凸な多角形を作る。こうしてできる多角形を(3)のcharacteristic polygonと呼ぶ。(Iwano-Sibuya[3])。　従って，(1)のcharacteristic polygonは右図のようになる。RとP_0以外のP_rはすべてこのpolygonとX軸の上方にあるから，characteristic polygonが2つの線分から成るという特徴は$a(x,\varepsilon)$の初めの2つの項で表現できる。それを表わすのが不等式(2)である。　characteristic polygonが1本の線分の場合と，$n=0$, $m=3$の場合は既に出来ている(Nakano-Nishimoto[4])。



3°　(1)の係数は$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x^m & 0 \end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x^n & 0 \end{bmatrix}$とかける。この初めの項は$x=0$のとき固有値が同じで，$x\neq 0$のときには異なる。　このような点を(1)のturning pointと呼ぶ。

(1)の解を$\varepsilon\to 0$としたとき$|x|\leq c_0$なる範囲で求めることが問題であるが，実際には，適当な角領域sectorで解の$\varepsilon\downarrow 0$のときの漸近性を調べる。　$x=0$の近くと，$x=0$から離れた所では方程式の形が変ってしまうために，従来の方法(Hukuhara[2], Turrittin[6])では求まらない。　そこで，

原点の近傍$|x| \leqq c_0$を幾つかのsubdomainに分け，各々のdomainで(1)を適当な形に変形し解をもとめ，緊要であることから特別な方法，即ちmatching methodによってそれらの解の間の関係(matching matrix)を求めよう．

§2. 形式的reduction.

方程式(1)を次のように4通りに変形する：

1° $M_1 \varepsilon^{\rho_1} \leqq |x| \leqq c_0$, $\rho_1 = 1/(m-n)$ では $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{m/2} \end{bmatrix} Z$ とおき

$$(4) \qquad (x^{-(m-n)}\varepsilon)\, x^{\frac{m}{2}-n} \frac{dZ}{dx} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + (x^{-(m-n)}\varepsilon) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{m}{2} x^{(m-2n-2)/2} \end{bmatrix} \right\} Z\,;$$

2° $c_1 \varepsilon^{\rho_1} \leqq |x| \leqq M_1 \varepsilon^{\rho_1}$ では $x = \varepsilon^{\rho_1} t$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{m/2(m-n)} \end{bmatrix} W$ とおき

$$(5) \qquad \varepsilon^{\frac{m-2n-2}{2(m-n)}} \frac{dW}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t^n - t^m & 0 \end{bmatrix} W\,;$$

3° $M_2 \varepsilon^{\rho_2} \leqq |x| \leqq c_1 \varepsilon^{\rho_1}$, $\rho_2 = 1/(n+2)$ では，$x = \varepsilon^{\rho_1} s$，$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} x^{n/2} \end{bmatrix} V$ とおき

$$(6) \quad \left(s^{\frac{(n+2)(m-n)}{m-2n-2}} \varepsilon\right)^{\frac{m-2n-2}{2(m-n)}} s \frac{dV}{ds} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - s^{m-n} & 0 \end{bmatrix} + \left(s^{\frac{(n+2)(m-n)}{m-2n-2}} \varepsilon\right)^{\frac{m-2n-2}{2(m-n)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2} \end{bmatrix} \right\} V\,;$$

4° $|x| \leqq M_2 \varepsilon^{\rho_2}$ では $x = \varepsilon^{\rho_2} r$，$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\frac{n+1}{n+2}} \end{bmatrix} U$ とおき，

$$(7) \qquad \frac{dU}{dr} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r^n & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{\frac{m-2n-2}{n+2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -r^m & 0 \end{bmatrix} \right\} U\,.$$

ところで，matchingするためには，例えば1°と2°について

考えると，両者のdomainはboundaryを共有するだけである．これが内点をもつようにoverlapしていると具合がよい．そこで，2°のdomain $c_1 \leq |t| \leq M_1$ を $0<|t|<\infty$ なる(或るsectorの)すべてのtに拡げて(5)の解を求めればよいことになる．同様に2°と3°は2°が$0<|t|<\infty$となっているので既にoverlapしているからmatchingできる．3°と4°をmatchingするために，4°で$0 \leq |r| \leq M_2$となっているのを$0 \leq |r| < \infty$なる(或るsectorの)すべてのrについて(7)の解を求めればよい．4°の$r=0$はturning point $x=0$に対応しているから$x=0$での値は4°から知られる．

以下では1°〜4°の各々の形式解と1°と2°，2°と3°，3°と4°をconnectionするmatching matricesの求め方などについて述べよう．

§3. 形式解.

1° (4)と(6)は次の形をしている：

$$M\varepsilon^{r} \leq |x| \leq c$$

なる領域で

$$(8) \qquad \lambda x^{p}\frac{dY}{dx} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f(x) & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g(x) & h(x) \end{bmatrix} \right\} Y = (A_0 + \lambda A_1) Y.$$

(4)では，$\lambda = x^{-(m-n)}\varepsilon$，$p = \frac{m}{2} - n$，$f(x) \equiv -1$，$g(x) \equiv 1$，$h(x) = -\frac{m}{2} x^{\frac{m-2n-2}{2}}$

$\rho=\rho_1=\frac{1}{m-n}$; (6) では $\lambda=\left(x^{-\frac{(n+2)(m-n)}{m-2n-2}}\varepsilon\right)^{\frac{m-2n-2}{2(m-n)}}$, $p=1$,
$f(x)=1-x^{m-n}$, $g(x)\equiv 0$, $h(x)\equiv -\frac{m}{2}$, $\rho=\rho_2-\rho_1=\frac{m-2n-2}{(n+2)(m-n)}$ (>0)
となる.

簡単のために

(9) $$0<\arg x<\frac{2\pi}{m-n}$$

なる範囲で考えよう.

適当な変換によって (9) において (8) の係数を対角化できる. まず $Y=QZ$, $Q=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{f} & \sqrt{f}\end{bmatrix}$ なる変換を行なうと

$$\lambda x^p\frac{dZ}{dx}=(B_0+\lambda B_1)Z,\ B_0=\begin{bmatrix}\sqrt{f} & 0\\ 0 & -\sqrt{f}\end{bmatrix}, B_1=Q^{-1}A_1Q-x^pQ^{-1}Q'$$

となる. 更に

$$Z=PV,\quad P=I+\sum_{r=1}^{\infty}P_r(x)\lambda^r,\ P_r=\begin{bmatrix}0 & p_r^1\\ p_r^2 & 0\end{bmatrix}$$

なる形の変換で

$$\lambda x^p\frac{dV}{dx}=CV,\ C=P^{-1}BP-\lambda x^pP^{-1}P'=\sum_{r=0}^{\infty}C_r(x)\lambda^r$$

と変形する. この際, P を適当に選ぶことによって C を対角化できる;

$$C_0=B_0,\ C_1=\begin{bmatrix}B_1^{11} & 0\\ 0 & B_1^{22}\end{bmatrix},\cdots;P_1=\begin{bmatrix}0 & -B_1^{21}/2\sqrt{f}\\ B_1^{12}/2\sqrt{f} & 0\end{bmatrix},\cdots.$$

このようにして, (4) の解は

$$Z(x,\varepsilon)\sim x_0^{\frac{m}{4}}x^{-\frac{m}{4}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ i & i\end{bmatrix}\exp\left\{\alpha_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\},$$

$$\alpha_1=\int_{x_0}^{x}\left[\frac{i}{2}x^{\frac{m}{2}}-\frac{i}{2}x^{-\frac{m}{2}+n}\right]dx,$$

(6) の解は

$$V(s,\varepsilon) \sim c_1 s^{-\frac{n}{4}} \begin{bmatrix} (1-s^{m-n})^{-\frac{1}{4}} & -(1-s^{m-n})^{-\frac{1}{4}} \\ (1-s^{m-n})^{\frac{1}{4}} & (1-s^{m-n})^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \exp\left\{ \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$c_1 = (s_0^n - s_0^m)^{\frac{1}{4}}, \quad \alpha_3 = \varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{m-n}} \int_{s_0}^{s} \sigma^{\frac{n}{2}} (1-\sigma^{m-n})^{\frac{1}{2}} d\sigma$$

となる.

2° (5) についても全く同様で, $0 < \arg t < \frac{2\pi}{m-n}$ で考えると $t^n - t^m = 0$ となる t (secondary turning point) が存在しないから

$$W(t,\varepsilon) \sim c_0 \begin{bmatrix} (t^n-t^m)^{-\frac{1}{4}} & -(t^n-t^m)^{-\frac{1}{4}} \\ (t^n-t^m)^{\frac{1}{4}} & (t^n-t^m)^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \exp\left\{ \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$c_0 = (t_0^n - t_0^m)^{1/4}, \quad \alpha_2 = \varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{m-n}} \int_{t_0}^{t} (\tau^n - \tau^m)^{1/2} d\tau .$$

(7) については, これは regular perturbation の形をしているから, leading term のみの方程式の解によって dominate されるであろう. そこで

$$u'' - r^n u = 0$$

なる方程式を考える. この解は変形された Bessel 函数によって表現できて, 一次独立の解として

$$\begin{cases} A_n(r) = p r^{1/2} \{ I_{-p}(\zeta) - I_p(\zeta) \} \sim \sqrt{\frac{p}{\pi}} \sin p\pi \, r^{-\frac{n}{4}} e^{-\zeta}, & r \to \infty, |\arg r| < 3p\pi, \\ B_n(r) = (pr)^{1/2} \{ I_{-p}(\zeta) + I_p(\zeta) \} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} r^{-\frac{n}{4}} e^{\zeta}, & r \to \infty, |\arg r| < p\pi \end{cases}$$

の2つをとることができる. 但し, $p = \rho_2 = \frac{1}{n+2}$, $\zeta = 2pr^{\frac{1}{2p}}$ で, 特に $n=1$ のときは, 良く知られた Airy の場合になる.

従って (7) の解は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$U(r,\varepsilon) \sim r_0^{\frac{n}{4}} \begin{bmatrix} a r^{-\frac{n}{4}} & c r^{-\frac{n}{4}} \\ b r^{\frac{n}{4}} & d r^{\frac{n}{4}} \end{bmatrix} \exp\left\{ \int_{r_0}^{r} r^{\frac{n}{2}} dr \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

である. 但し, $r_0^{\frac{n}{4}} a = r_0^{\frac{n}{4}} b = 1/\sqrt{\pi}$, $\frac{1}{2} r_0^{\frac{n}{4}} c = -r_0^{\frac{n}{4}} d = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \sin p\pi$.

3° 以上をもとの変数 x にもどして leading term のみを表わすと

$M_1 \varepsilon^{\rho_1} \leq |x| \leq c_0$, $0 < \arg x < \frac{2\pi}{m-n}$ で

(10) $$Y(x,\varepsilon) \sim x_0^{\frac{m}{4}} \begin{bmatrix} x^{-\frac{m}{4}} & -x^{-\frac{m}{4}} \\ i x^{\frac{m}{4}} & i x^{\frac{m}{4}} \end{bmatrix} \exp\left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\varepsilon \to 0);$$

$0 < |t| < \infty$, $0 < \arg t < \frac{2\pi}{m-n}$ $(x = \varepsilon^{\rho_1} t)$ で

(11) $$Y(x,\varepsilon) \sim c_0 \varepsilon^{\frac{m}{4(m-n)}} \begin{bmatrix} x^{-\frac{n}{4}}(\varepsilon - x^{m-n})^{-\frac{1}{4}} & -x^{-\frac{n}{4}}(\varepsilon - x^{m-n})^{-\frac{1}{4}} \\ x^{\frac{n}{4}}(\varepsilon - x^{m-n})^{\frac{1}{4}} & x^{\frac{n}{4}}(\varepsilon - x^{m-n})^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \exp\left\{ \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\varepsilon \to 0);$$

$M_2 \varepsilon^{\rho_2} \leq |x| \leq c_1 \varepsilon^{\rho_1}$, $0 < \arg x < \frac{2\pi}{m-n}$ で

(12) $$Y(x,\varepsilon) \sim c_1 \varepsilon^{\frac{1}{4(m-n)}} \begin{bmatrix} x^{-\frac{n}{4}}(\varepsilon - x^{m-n})^{-\frac{1}{4}} & -x^{-\frac{n}{4}}(\varepsilon - x^{m-n})^{-\frac{1}{4}} \\ x^{\frac{n}{4}}(\varepsilon - x^{m-n})^{\frac{1}{4}} & x^{\frac{n}{4}}(\varepsilon - x^{m-n})^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \exp\left\{ \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} (\varepsilon \to 0);$$

$0 \leq |r| < \infty$, $0 < \arg r < \frac{\pi}{m-n} \left(< \frac{\pi}{n+2} \right)$ $(x = \varepsilon^{\rho_2} r)$ で

(13) $$Y(x,\varepsilon) \sim x_1^{\frac{n}{4}} \begin{bmatrix} a x^{-\frac{n}{4}} & c x^{-\frac{n}{4}} \\ b x^{\frac{n}{4}} & d x^{\frac{n}{4}} \end{bmatrix} \exp\left\{ \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\varepsilon \to 0, r \to \infty),$$

$r_0 = x_1 \varepsilon^{-\frac{1}{n+2}}$

となる.

それぞれの積分路は収束するようにとる。例えば(10)においては $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{2}{m+2}ix^{\frac{m+2}{2}}\right) \geqq 0$ or $\leqq 0$ なるように選ぶ。こうすることにより、形式解が真の解の漸近展開になっていることも証明できる。

§4. 形式解の漸近性。

前節の積分路のとり方について少し詳しく述べよう。

1° (5)の形をした正の小さなパラメーター λ を含む微分方程式

$$\lambda^2 y'' - f(t)y = 0 \tag{14}$$

について考える。

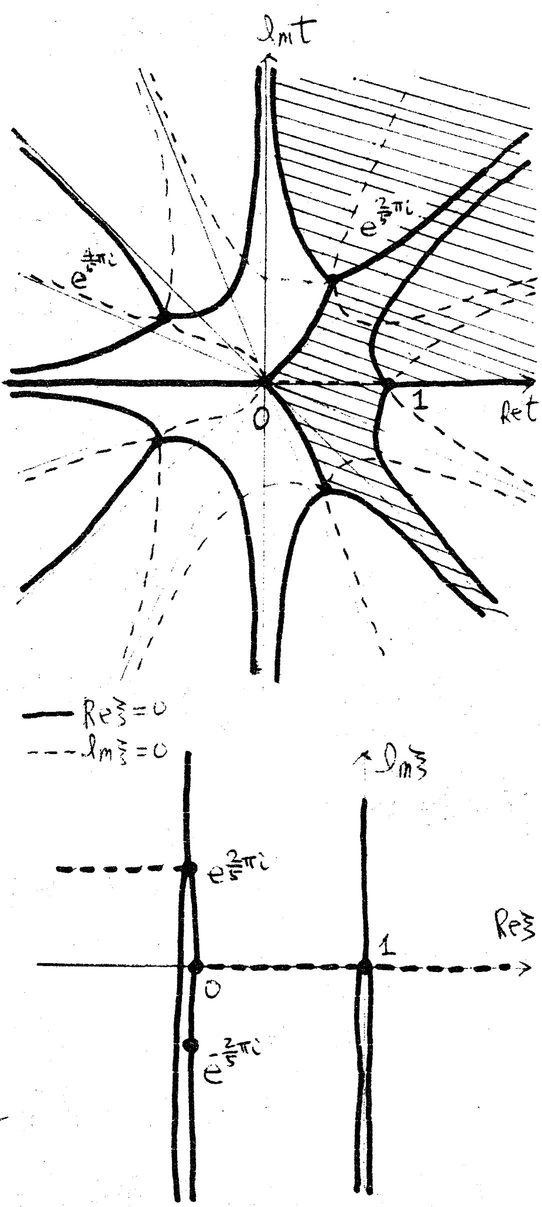
$f(t)$ の零点を(14)の turning point といい、零点の重複度を turning point の order という。直交座標 $(\mathrm{Re}\,t, \mathrm{Im}\,t)$ をもつ t-平面において1つの turning point t_0 から出る曲線

$$\mathrm{Re}\,\xi(t_0, t) = 0, \tag{15}$$

$$\xi(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} f(t)^{1/2}\,dt \tag{16}$$

を(14)の Stokes curves という。order m の turning point からは $m+2$ 本の Stokes curves が $2\pi/(m+2)$ の角度で出る。(16)によって定義される t-平面から ξ-平面への写像によって t-平面における Stokes curves によって囲まれた無限領域が ξ-平面全体に一対一に写されるとき、この無限領域を(14)の

canonical region と呼ぶ. $f^{1/2}$ の branch のとり方 により canonical region の ζ-平面における像は二通りあるので branch のとり方を予め決めておけばよい. (16) の右辺は一般には積分不可能なので, canonical region を描くことは正確には不可能と思われるが, 例として $f(t)=t-t^6$ $(n=1, m=6$ の場合$)$ に一つの canonical region を描くと右図の様になる. また ζ-平面においてはその下の図の様になる. 従って下図をみると(ある一点から) $\mathrm{Re}\,\zeta \geq 0$ なる道(曲線)を選ぶことは容易である. この道の (16) による逆像が t-平面における $\mathrm{Re}\int f^{1/2} \geq 0$ なる積分路である. $\mathrm{Re}\,\zeta \leq 0$ の場合も全く同様である. 一般の $f(t)$ についても同様に考えられることは類推できる.



2° 次に形式解が canonical region において真の解の漸近展開になっていることを示そう.

canonical region $\mathfrak{D}$ の boundary の δ-近傍をとり除いた領域を $\mathfrak{D}_\delta$

とするとき，$\mathcal{D}_\delta$ のすべての t に対して $\lambda \to 0$ のとき (5) は次の漸近展開をもつ：

$$\begin{cases} w(t,\lambda) = f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}\{1+O(\lambda)\}, \\ w'(t,\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}\{1+O(\lambda)\}. \end{cases}$$

これを示すためには，まず (5) を

$$W = f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} R S \Phi, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{f} & \sqrt{f} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}\lambda$$

で変換すると

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left\{ \frac{\sqrt{f}}{\lambda} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix} \lambda \right\} \Phi,$$

$$\alpha = \frac{1}{32} p'^2 p^{-\frac{5}{2}}, \quad \beta = \frac{1}{8}\left(p' p^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{1}{8} p'' p^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{16} p'^2 p^{-\frac{5}{2}}$$

となる．これは $\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$ とおくと次の積分不等式と同等である．

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \lambda \displaystyle\int_\delta \{\alpha(\zeta)\varphi_1(\zeta) - \beta(\zeta)\varphi_2(\zeta)\} \exp\left\{\frac{2}{\lambda}\int_s^t f^{\frac{1}{2}} dt\right\} d\zeta, \\ \varphi_2(t) = 1 + \displaystyle\int_\delta \{\beta(\zeta)\varphi_1(\zeta) - \alpha(\zeta)\varphi_2(\zeta)\} d\zeta. \end{cases}$$

積分路 δ は

$$\mathrm{Re} \int_s^t f^{\frac{1}{2}} dt \leq 0$$

なるようにとりたい．ところで canonical region $\mathcal{D}$ の中ではこれは可能である．上の積分方程式を

$$\Phi = \Phi_0 + d\Phi, \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおく．これを逐次近似法で解く．

$\Phi^{(0)}=\Phi_0$, $\Phi^{(n)}=\mathcal{L}^n\Phi_0=\begin{bmatrix}\varphi_1^{(n)}\\ \varphi_2^{(n)}\end{bmatrix}$ とおくと

$$\begin{cases}\varphi_1^{(0)}=0\\ \varphi_2^{(0)}=1\end{cases},\quad \begin{cases}\varphi_1^{(n+1)}=\lambda\int_{\mathcal{D}}(\alpha\varphi_1^{(n)}-\beta\varphi_2^{(n)})\exp\{\frac{2}{\lambda}\int_s^t\sqrt{f}\,dt\}\,d\zeta\\ \varphi_2^{(n+1)}=\lambda\int_{\mathcal{D}}(\beta\varphi_1^{(n)}-\alpha\varphi_2^{(n)})\,d\zeta\end{cases}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

さて

$$\psi(t)=\int_{\mathcal{D}}(|\alpha|+|\beta|)\,|d\zeta|$$

は $|\alpha|,|\beta|=O(t^{-\frac{n}{2}-2})$ $(t\to\infty)$ だから $\mathcal{D}_0$ で有界である.

従って

$$\psi_0=\sup_{t\in\mathcal{D}}|\psi(t)|$$

が定まる. このとき, 次の不等式が成り立つことがわかる.

$$|\varphi_j^{(n)}|\leq|2\psi_0\lambda|^n\quad(n=0,1,2,\cdots;\ j=1,2).$$

$n=0$ のときは明らかである. 一般の場合には n に対して成り立つとすると

$$|\varphi_1^{(n+1)}|\leq\lambda\int_{\mathcal{D}}|\alpha\varphi_1^{(n)}-\beta\varphi_2^{(n)}||d\zeta|\leq\lambda\int_{\mathcal{D}}(|\alpha|+|\beta|)(|\varphi_1^{(n)}|+|\varphi_2^{(n)}|)|d\zeta|$$
$$\leq|2\psi_0\lambda|^{n+1}$$

となり証明ができた. $\varphi_2^{(n)}$ についても全く同様である.

このことから, λ を充分小さくとると($\lambda\leq\lambda_0$) 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|2\psi_0\lambda|^n \text{ は収束}$$

して

$$|\varphi_j|\leq 2\quad(j=1,2)$$

が成立する. 更に

$$|\varphi_1|,\ |\varphi_2-1|\leq 4\psi\lambda$$

が成り立つことも積分方程式から分かる。

上の3つの不等式から目的の漸近性が言える。なぜならば

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} R_\lambda \Phi$$

$$= f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \begin{bmatrix} (1+\beta\lambda)\varphi_1 + (-1+\beta\lambda)\varphi_2 \\ f^{\frac{1}{2}}\{(1-\beta\lambda)\varphi_1 + (1+\beta\lambda)\varphi_2\} \end{bmatrix},$$

$$w = W_1, \quad W_1' = \frac{1}{\lambda} W_2$$

から,

$$w = W_1 = f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}\{\varphi_1 - \varphi_2 + \beta\lambda(\varphi_1 + \varphi_2)\}$$

$$= f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}\{-1 + \varphi_1 - (\varphi_2 - 1) + \beta\lambda(\varphi_1 + \varphi_2)\}.$$

これより

$$|w + f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \leq |f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \{|\varphi_1| + |\varphi_2 - 1| + |\beta|\lambda(|\varphi_1| + |\varphi_2|)\}$$

$$\leq |f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \cdot 4(2\psi + |\beta|)\lambda$$

が得られる。　また

$$W_2 = f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}\{\varphi_1 + \varphi_2 + \beta\lambda(\varphi_2 - \varphi_1)\}$$

$$= f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}\{1 + \varphi_1 + (\varphi_2 - 1) + \beta\lambda(\varphi_2 - \varphi_1)\}$$

から

$$|W_2 - f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \leq |f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \{|\varphi_1| + |\varphi_2 - 1| + |\beta|\lambda(|\varphi_1| + |\varphi_2|)\}$$

$$\leq |f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2}| \cdot 4(2\psi + |\beta|)\lambda$$

となる。

上の証明において, $4(2\psi + |\beta|)\lambda$ は $\lambda \geqq \lambda_0$ と $t \in \mathfrak{D}_\delta$ に対して $t \to \infty$ とするとき 0 に近づくから,

$\mathrm{Re}\,\alpha_2 \to +\infty$ となるように $\mathcal{D}$ で $t \to \infty$ とすると，すべての $\lambda\ (\leq \lambda_0)$ に対して

$$\begin{cases} w \sim -f^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \\ w' \sim \frac{1}{\lambda} f^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2} \end{cases}$$

となることもわかる．もう1つの expential type も同様である．

§5. Matching matrices.

次に，今までもとめたいろいろな解の間の関係，i.e., matching matrix をもとめよう．

1° まず(10)と(11)を matching しよう．

$$E_i = \exp\left\{\alpha_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\},\quad F_i = \begin{bmatrix} a_i & c_i \\ b_i & d_i \end{bmatrix},\quad \mathfrak{M}_{12} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと，(10)，(11) の解は各々 F_1E_1, F_2E_2 の形をしている．従って両者の間は x に関係ない行列 $\mathfrak{M}_{12}$ により

$$F_1E_1 = F_2E_2 \cdot \mathfrak{M}_{12}$$

なる関係で結ばれるはずである．この $\mathfrak{M}_{12}$ を(10)と(11)を connection (or matching) する matching matrix と呼ぶ．

x と t を

(17) $\quad x_\eta = \eta\,\varepsilon^{\frac{p_1}{2}},\quad t_\eta = \eta\,\varepsilon^{\frac{p_2}{2}}$

ととる．ここに，η は新しい parameter で $|\eta| = 1$ なる複素数で，$\arg\eta$ は解の積分路に関係するようにとる．このように x_η と t_η を選ぶと，十分小さな ε に対して τ_η は

$M_1\varepsilon^{p_1} \leqq |x| \leqq c_0$ に入り，$\varepsilon\to 0$ のとき $t_1\to\infty$ となる.

$2°$　さて上式を

$$(18)\qquad F_2^{-1}F_1 = E_2 \mathfrak{M}_{12} E_1^{-1}$$

と書き直し，両辺を成分で表わして，(17)なる関係式を代入する.

$$(18)'\quad \frac{1}{\det F_2}\begin{bmatrix} a_1d_2-c_1b_2 & b_1d_2-d_1b_2 \\ c_1a_2-a_1c_2 & d_1a_2-b_1c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}e^{\alpha_2-\alpha_1} & m_{12}e^{\alpha_2+\alpha_1} \\ m_{21}e^{-\alpha_2-\alpha_1} & m_{22}e^{-\alpha_2+\alpha_1}\end{bmatrix}.$$

この左辺は，

$$\begin{aligned} a_1d_2-c_1b_2 &= 2x_0^{\frac{m}{2}}x^{\frac{n-m}{4}}(\varepsilon-x^{m-n})^{\frac{1}{4}} \\ &= 2e^{\frac{\pi}{4}i}\eta^{\frac{n-m}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{8}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{8}}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\eta^{m-n})^{\frac{1}{4}} \\ &\sim 2e^{\frac{\pi}{2}i}x_0^{\frac{m}{2}}\quad(\varepsilon\to 0),\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1a_2-a_1c_2 \\ b_1d_2-d_1b_2\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} d_1a_2-b_1c_2 &= 2i\,x_0^{\frac{m}{4}}x^{\frac{m-n}{4}}(\varepsilon-x^{m-n})^{-\frac{1}{4}} \\ &\sim 2e^{\frac{\pi}{2}i}x_0^{\frac{m}{2}}\quad(\varepsilon\to 0),\end{aligned}$$

$$\det F_2 = 2x_0^{\frac{m}{2}}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

であるから

$$F_2^{-1}F_1 \sim \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad(\text{as } \varepsilon\to 0)$$

となる.

ところで右辺については　$t_0=O(\varepsilon^{-\frac{1}{2(m-n)}})$ ととることにより，

$$\alpha_2=\alpha_1+O(t^{2n-\frac{3}{2}m+1})\varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{2(m-n)}}+O(t_0^{2n-\frac{3}{2}m+1})\varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{2(m-n)}}$$

となるから，

$$\pm(\alpha_1+\alpha_2)=\pm 2\alpha_1+O(\varepsilon^{\frac{m+2}{4(m-n)}}),$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1-\alpha_2\\ \alpha_2-\alpha_1\end{array}\right\}=O(\varepsilon^{\frac{m+2}{4(m-n)}})$$

である． さて，積分路は $\mathrm{Re}\,\alpha_1\geqq 0$ or $\leqq 0$ なるように二通りとってあり，matching matrix $\mathfrak{M}_{12}$ はτに関係ないから η をこの積分路の向きに（二通りに）とれば，

$$\pm\,\mathrm{Re}(\alpha_1+\alpha_2)\to+\infty$$

とできるから，

$$\left|e^{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}\right|\to+\infty.$$

また $\alpha_1-\alpha_2\to 0$ (as $\varepsilon\to 0$) だから

$$e^{\pm(\alpha_1-\alpha_2)}\sim 1$$

となる．

以上のことから，右辺は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき

$$E_2\mathfrak{M}_{12}E_1^{-1}\sim\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}e^{2\alpha_1}\\ m_{21}e^{-2\alpha_1} & m_{22}\end{bmatrix},\quad e^{\pm 2\alpha_1}\to\infty\ (\varepsilon\to 0)$$

となる．

従って

$$\mathfrak{M}_{12}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad(\varepsilon\to 0)$$

である．

3° (12)と(13)の matching もほゞ同様にできる．即ち，

$$s_\eta = \eta\, \varepsilon^{\frac{p_2-p_1}{2}} \quad (\to 0 \text{ as } \varepsilon\to 0),$$
$$r_\eta = \eta\, \varepsilon^{\frac{p_1-p_2}{2}} \quad (\to \infty \text{ as } \varepsilon\to 0),$$
$$x_\eta = \varepsilon^{p_1} s_\eta = \varepsilon^{p_2} r_\eta = \eta\, \varepsilon^{\frac{p_1+p_2}{2}}$$

ととることにより，(18) に相等する式を計算すればよい．勿論，ここの η は前の η とは異なるが，同じ性質をもつものである．

$$\mathfrak{M}_{34} \sim \frac{M^{\frac{m-n}{4}} e^{\frac{\pi}{4}i}}{ad-bc} \begin{bmatrix} b+d & 0 \\ 0 & a-c \end{bmatrix} \varepsilon^{\frac{m-2n-2}{n+2}} \quad (\text{as } \varepsilon\to 0),$$

ただし，$x_1 = O(\varepsilon^{p_2}) = M\varepsilon^{\frac{1}{n+2}}$，$r_0 = M$ ととった．

4° (11) と (12) については

$$x_\eta = \eta\, \varepsilon^{\frac{t_1+t_2}{2}}, \quad t_\eta = s_\eta = \eta\, \varepsilon^{\frac{t_2-t_1}{2}}$$

とって matching する．$x_0 = \varepsilon^{\frac{1}{2(m-n)}}$，$x_1 = M\varepsilon^{\frac{1}{n+2}}$ としたからこれらに各々対応する点は $t_0 = \varepsilon^{-\frac{1}{2(m-n)}}$，$s_0 = \varepsilon^{\frac{m-2n-2}{(n+2)(m-n)}}$ である．これから

$$\mathfrak{M}_{23} \sim M^{-\frac{m}{4}} \begin{bmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{bmatrix} \varepsilon^{\frac{m(-2m+3n+2)}{8(m-n)(n+2)}} \quad (\varepsilon\to 0)$$

である．$\alpha = \varepsilon^{-\frac{m-2n-2}{2(m-n)}} \int_{s_0}^{t_0} (\tau^n - \tau^m)^{1/2}\, d\tau$．

以上から (1) の解の漸近的性質が $0 < \arg x < \frac{\pi}{m-n}$ なる角領域でいえたことになる．

参考文献

[1] Evgrafov,E.M., and M.V.Fedoryuk, Asymptotic behavior as $\lambda\to\infty$ of the solution of the equation $w''(z) - p(z,\lambda)w(z)=0$ in the complex z-plane. Russian Math.Surveys. 21(1966),1-48.

[2] Hukuhara,M., Sur les prorpriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contnaint un paramètre. Mem.Fac.Eng.Kyushu Imp.Univ. 8(1937),249-280.

[3] Iwano,M., and Y.Sibuya, Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter, Kōdai Math. Sem.Rep. 15(1963),1-28.

[4] Nakano,M. and T.Nishimoto, On a secondary turning point problem. Ibid.22(1970),355-384.

[5] Swanson,S.A. and V.B.Headley, An extension of Airy's equation. SIAM J.Appl. Math. 15(1967),1400-1412.

[6] Turrittin,H.L., Asymptotic expansions of solutions of system of ordinary differential equations, Contributions to the theory of nonlinear oscillations II, Ann. of Math. Studies No.29,81-116.

[7] Wasow,W., A turning point problem for a system of two linear differential equations J.Math. and Phys. 38(1959),257-278.